狭义相对论不得不说的那些事

Key to Universal Physics

作者：钱院学辅大物编写小组

2019 年 5 月 10 日

钱学森书院学业辅导中心

Qian Yuan Xue Fu

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

作品信息

➤ **标题：** 狭义相对论不得不说的那些事 - *Key to Universal Physics*
➤ **作者：** 钱院学辅大物编写小组
➤ **校对排版：** 钱院学辅排版组
➤ **出品时间：** 2019 年 5 月 10 日
➤ **总页数：** 9

本作品已发布于 GitHub 之上，发布地址为：

`https://github.com/qyxf/Tutorials/`

本作品的版本号为 v2.0。

§0.1 洛伦兹变换、尺缩公式和钟缓公式

初学者经常会搞不清楚这三个公式的适用条件，事实上这三个公式并不是同一“层次”的公式。洛伦兹变换描述的是在不同参考系中看同一事件的方法，而尺缩钟缓是洛伦兹变换的导出关系。

0.1.1 钟缓

对于 S' 系中的两个事件：他们之间仅有时间间隔，没有空间间隔

$$A(x',y',z',t_1') \qquad B(x',y',z',t_2')$$

在 S 系中有

$$A(\frac{x'+vt_1'}{\sqrt{1-\beta^2}},\gamma',z',\frac{t_1'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}) \qquad B(\frac{x'+vt_2'}{\sqrt{1-\beta^2}},\gamma',z',\frac{t_2'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}})$$

S 系中看到的两事件时间间隔

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{t_2'-t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

即为钟缓公式.

0.1.2 尺缩

对于 S' 系中的两个事件：它们之间仅有空间间隔

$$A(x_1',y',z',t') \qquad B(x_2',y',z',t')$$

S 系中

$$A(\frac{x_1'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}},y',z',\frac{t'+\frac{v}{c^2}x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}) \qquad B(\frac{x_2'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}},y',z',\frac{t'+\frac{v}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-\beta^2}})$$

S 系中两事件空间间隔

$$\Delta x = x_B - x_A = \frac{x_2'-x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

故尺缩公式为

$$l' = \sqrt{1-\beta^2}$$

0.1.3 注意事项

这里有一个误区（坑），很多人，尤其是初学者，喜欢对于 S' 系中的两个事件的空间间隔应用尺缩公式。但是，其实这是不正确的，尺缩仅仅是对于 S' 系或 S 系中实实在在的尺子才可以使用的。准确来说，尺缩公式是这样推导出来的：

在 S 系中有两个事件：A：看尺子前端 (x_1,y_1,z_1,t_1)

B：看尺子后端 (x_2,y_2,z_2,t_2) $\qquad (y_1=y_2, z_1=z_2)$

在 S' 系中

$$x_1' = \frac{x_1-vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x_2' = \frac{x_2-vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

S 系中空间间隔

$$x_1' - x_2' = \frac{(x_1 - x_2) - v(t_1 - t_2)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

但是测量尺长时，S 系中尺子是动的，S' 系中尺子是不动的，因此为了保证 S 系中测得尺长的准确，应当同时看前后两端

$$t_1 = t_2$$

则

$$x_1' - x_2' = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 - x_2 = (x_1' - x_2')\sqrt{1-\beta^2} = L\sqrt{1-\beta^2}$$

因此：尺缩公式不是长度变换（或距离变换），对于 S' 系中同时发生的事件，在 S 系中看要用洛伦兹变换，洛伦兹变换才是求解相对论问题的正确打开方式.

0.1.4 小结

S' 系中同地不同时 $\to S$ 系　　用钟缓.

S' 系中长度固定不变 $\to S$ 系　　用尺缩.

其他 $S \to S'$ 和 $S' \to S$　　对每个事件用洛伦兹变换，然后作差.

练习例题：作业第一题 飞船以 $u = 0.6c$ 飞离地球. 假设头部向尾部发出一个光讯号. 飞船上经 $\Delta t' = 1\mu s$ 后尾部接受器接收到该信号，求地面上观测者测得光讯号到达船尾的时间 Δt.

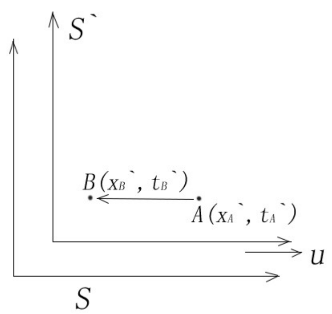
解

解：以飞船参考系为 S' 系，地面系为 S 系.

在飞船系中，事件 A：发出光，事件 B，接受光.

在 S 系中，对 A：$(\beta = \frac{u}{c})$

$$x_A = \frac{x_A' + ut_A'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t_A = \frac{t_A' + \frac{u}{c^2}x_A'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



对 B：

$$x_B = \frac{x_B' + ut_B'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t_B = \frac{t_B' + \frac{u}{c^2}x_B'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

S 系中的时间差：

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{(t_B' - t_A') + \frac{u}{c^2}x_B'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

在 S' 系中，光沿 x' 负方向：$x_B' - x_A' = -c(t_B' - t_A')$

即

$$\Delta t = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}(t_B' - t_A') = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\Delta t = 0.5\mu s$$

分析：

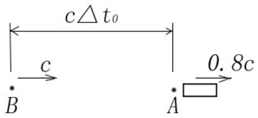
对洛伦兹变换的理解：观察者站在<u>不同参考系</u> 中观测事件引发的事件的<u>空间坐标和时间坐标</u>的变化.

在同一参考系中，某些经典力学的结论仍然成立.

练习作业 18 题第一空 地面参考系中工作人员发射脉冲信号时间间隔为 $3s$，地面上工作人员看两信号被接受的时间间隔____s.

解 因为不涉及参考系的变换，两个都是在地面系中观察，这就是一个普通 的追及问题.

A 信号被接收时:



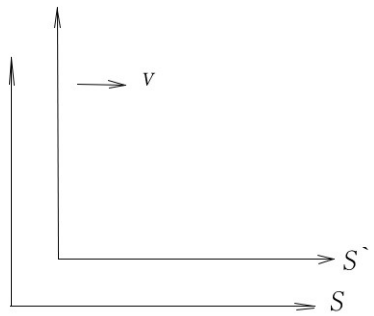
因此时间差为

$$\Delta t = \frac{c\Delta t_0}{c-0.8c} = 5\Delta t_0 = 15s$$

是的，这一小问没有使用相对论.

§0.2 速度变换的一点小问题

采用微分法推导速度变换 $\beta = \frac{u}{c}$



$$\begin{cases} \mathrm{d}x' = \frac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t - \frac{v\mathrm{d}x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

算出速度变换

$$\begin{cases} u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{u_x - v}{1-\frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{vu_x}{c^2}} \end{cases}$$

其中，$u'_x \Rightarrow \quad S \to S'$ 系，相对速度小于绝对速度，因此都为减 (可以与伽利略速度变换比较 $u'_x = u_x - v$). u'_y 和 u'_z 在伽利略变换中实际上不变.

逆变换

$$\begin{cases} u_x = \frac{u'_x + v}{1+\frac{vu_x}{c^2}} \\ u_y = \frac{u'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{vu'_y}{c^2}} \\ u_z = \frac{u'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{vu'_z}{c^2}} \end{cases}$$

对比伽利略变换

$$\begin{cases} u_x = u'_x + v \\ u_y = u'_y \\ u_z = u'_z \end{cases}$$

§0.3　关于能量

与经典不同之处在于，引入了总能量 $E=mc^2$(爱因斯坦指出，m 比 $\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 更恰当)

静能　　$E_0=m_0c^2$

总能　　$E=mc^2$

动能　　$E_k=E-E_0=mc^2-m_0c^2$

由几个公式可以推导出 $E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$

○ 因此：在相对论的世界中，只有动能是不容易确定的，它应由总能量与静能相减得到.

总能量和静能都可以由静质量和动质量得到.

在这一部分的计算中，更多是一些原子物理方面的情境，比如 Λ^0 超子衰变.

在原子物理中使用的单位制是：质量 MeV/c^2　　能量 MeV　　动量 MeV/c

因此较为方便计算，没有必要为光速 c 烦恼.

○ 解题方面：

(1) 总能量之和不变（即能量守恒）.

(2) 碰撞、衰变、分裂过程中动量守恒.

(3) 直接的结论就是粒子的静质量之和不守恒 → 质量亏损.

§0.4　拓展内容

0.4.1　关于历史问题的一点叙述

麦克斯韦电磁理论与相对性原理的冲突：

在牛顿时代，人们发现了这样一条定律，“物理定律在所有惯性系中都有相同的数学形式”。事实上，牛顿的经典力学中的每一个定律都遵循这样的一条规律。这样的一条定律是物理学中对称性的体现。经过长期的理论研究发现，这条定律约束着其他的规律。它是一条“管定律的定律”。好景不长，麦克斯韦建立了它的电磁理论后，发现了这样的矛盾

$$\text{水火不容？}\begin{matrix}\nearrow\\ \searrow\end{matrix}\left.\begin{matrix}\text{(1) 麦克斯韦方程：光速为 } c\\ \text{(2) 相对性原理：协变性}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\text{光速对各系为 } c\overset{?}{\Longleftrightarrow}\text{与伽利略变换矛盾}$$

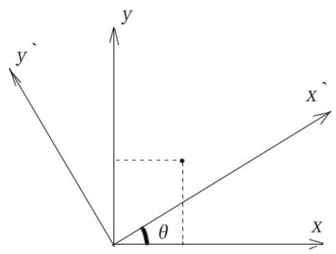
仔细思考：原牛顿力学中的相对性原理是由伽利略变换导出的，但是原相对性原理应该是可以和麦氏方程相容的。真正水火不容的氏麦氏方程和伽利略变换。只有默认相对性原理是由伽利略变换得到的才会遇到这样的矛盾。爱因斯坦的功劳在于他敏锐地发现伽利略变换的不完善性，并使用数年前洛伦兹得到的变换式去修正伽利略变换，进而使麦氏方程与修正后的相对性原理相容。我们可以发现，狭相的两条假设分别对应着相对性原理和麦克斯韦方程组，而整个相对论体系是适用于宏观高速的一切定律的。

0.4.2　关于洛伦兹变换和尺缩、钟缓公式

1. 理解“事件”：相对论中需要抓住的一个要点即是“事件”

对于事件 $A(x,y,z,t)$，其时空坐标在不同参考系是不同的，我们可以用洛伦兹变换将事件的 S 系中的坐标 (x,y,z,t) 换到 S' 系中，得到 S 系坐标 (x',y',z',t')

2. 洛伦兹变换的实质



空间中坐标 (x,y)，在 S 系中坐标为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

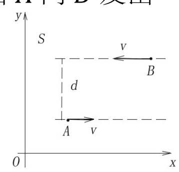
洛伦兹变换

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & & \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

洛伦兹变换实际上是四维时空（闵氏空间）中的旋转变换.

0.4.3 例题

练习: 例 1 A , B 为宇宙中的两艘飞船，A 以速度 $v=\beta c$ 沿 x 轴正方向飞行，B 以速度 $v=\beta c$ 沿 x 轴负方向飞行。两者在 S 系中观察，y 方向上由 $y_B-y_A=d$，当在 S 系中，A、B 之间距离最短时，由 A 向 B 发出一束光信号，问:



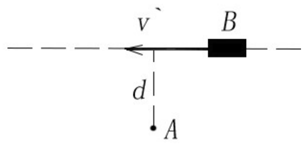
1. 以 A 为参考系，A 应该按什么方向发射光信号，使 B 接收到?

分析 如果按 S 系算，那就先勾股定理，然后还要换成 A 系，很明显，这有些麻烦.

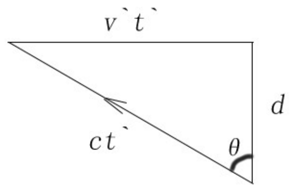
不如直接以 A 为参照系，此时 B 的相对速度

$$v' = \frac{v-(-v)}{1-\frac{v\cdot(-v)}{c^2}} = \frac{2\beta}{1+\beta^2}c$$

当我们站在飞船上，B 是这样运动的:



距离最短时，A 发出光，但是肯定不是指向 B，情况是这样:



t' 为光信号在 A 系中传播的时间，由勾股定理

$$(v't')^2+d^2=(ct')^2$$
$$\tan\theta = \frac{v't'}{d}$$

最终解得光信号与 x 轴正向夹角 $\varphi=\frac{1}{2}\pi+\theta=\frac{1}{2}\pi+\arctan\frac{2\beta}{1-\beta^2}$

有没有更简单的？

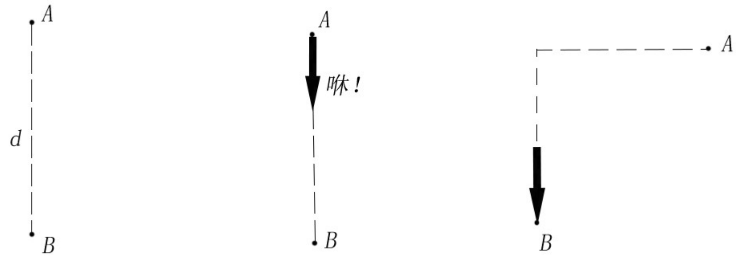
仔细看可以发现 $\sin\theta=\frac{v't'}{ct'}=\frac{2\beta}{1+\beta^2}$

夹角 φ 可以表示为 $\varphi=\frac{1}{2}\pi+\arcsin\frac{2\beta}{1+\beta^2}$

(好吧，第一种解法只是我硬写的计算方式，大家忽略吧......)

练习：例题 2 B 接收到信号时，B 中宇航员认为自己与 A 相距多少？B 宇航员的眼中，A 是怎样的？

(1) 首先距离最短时　(2)A 向 B 发了束光　(3) 光到了 B　(4) 没了......



那时间呢？

解 B 系：$t''=\frac{d}{c}$（光是正冲着 B 发出去的）

而 A 的速度不难求　$v_A'=\frac{2\beta}{1+\beta^2}c$ 为 A 相对 B 的速度.

由此 A 与 B 相距同样可以利用勾股定理

$$L_(AB)=\sqrt{d^2+(v_A''t'')^2}=\frac{\sqrt{(1+\beta^2)^2+4\beta^2}}{1+\beta^2}d$$

我们再看第 1 问，以 A 为参考系，从发光到 B 接收光时间

$$t'=\frac{d}{c}=\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}$$

这与 t'' 是不一样的，大家不要想当然地代错时间.

练习: 例 3 关于能量与质量的理解:

太空火箭的初始质量 M_0，从静止起飞，向后喷出的气体相对火箭速度为常数 u，任意时刻设火箭的速度为 v，静止质量为 m_0，试求 $\frac{m_0}{M_0}$ 与 v 的关系.

解 设在地球参考系中，时刻 t 火箭的质量为 m（是质量，不是静止质量）.

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\qquad\qquad \beta=\frac{v}{c}$$

设火箭在 t 时刻喷出 $\mathrm{d}m$ 气体，这部分气体与火箭系统动量守恒，但我们先要换到地球参考系，系中的

$$v_{气}=\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

方向向下.

列动量守恒：$mv=(m-|\mathrm{d}m|)(v+\mathrm{d}v)+v_{气}|\mathrm{d}m|$

而火箭质量是一直减的（$\mathrm{d}m<0$），因而有

$$|\mathrm{d}m|=-\mathrm{d}m=-\mathrm{d}(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}) \tag{1}$$

带入化简得

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathrm{d}v+(v+v_{气})\mathrm{d}(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}})=0 \tag{2}$$

这是忽略高阶小量后的表达式

(1)(2) 式代入得

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathrm{d}v+\frac{u(1-\beta^2)}{1-\frac{u}{c}\beta^2}[\frac{\mathrm{d}m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}+m_0\frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}v}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}]=0$$

化简后得 $m_0\mathrm{d}v=u(\beta^2-1)\mathrm{d}m_0$

之后是一系列的积分得

$$\ln m_0=\frac{c}{2u}\ln\frac{1-\beta}{1+\beta}+C$$

$t=0$ 时 $\beta=0 \quad m_0=M_0$，故 $C=\ln M_0$

代入式子得

$$\frac{m_0}{M_0}=(\frac{1-\beta}{1+\beta})^{\frac{c}{2u}}$$

如果是考试，应该不会出像这样数学成分比较多的题，主要是注意下动量守恒的式子，有些人可能会这样写

$$\frac{M_0}{\sqrt{1-\beta^2}}v=(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{\mathrm{d}m_0}{\sqrt{1-\beta^2}})(v+\mathrm{d}v)-v_{气}(\frac{-\mathrm{d}m_0}{\sqrt{1-\beta^2}})$$

肯定不对. 建议大家列动量守恒式时先用动质量 m，再谨慎地换为静质量 m_0.

§0.5 写在后面

以上只是做题时，自己的一些想法......

如果你有一套自己的做题体系，那还是不要轻易改变，毕竟相对论的题，在 S 系看能做出来，在 S' 系看也能做，我写的只是我认为的“建议”。

如果你是高数大佬，或者 C++ 大神，欢迎向钱院学辅投稿，写点小助手啥的。

祝大家相对论学习顺利！